★

Exercice 1 — Voir correction

Dans chacun des cas suivant, on admet que la fonction f est définie et dérivable sur le domaine $\mathcal{D}_f$. Calculer la dérivée de f dans chaque cas.

a) $f(x) = \cos(3x^2)$, $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (1+\ln(x))^4$, $\quad \mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$

c) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \ln(2+\sin x)$, $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \ln(|1+x|)$, $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3-x^2}$, $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

★

Exercice 2 — Voir correction

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\ +\infty[$.

2) **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

★

Exercice 3 — Voir correction

Pour chacune des fonctions suivantes :

- ▷ déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$
- ▷ déterminer, si elles existent, ses limites aux bornes de son ensemble de définition en précisant les asymptotes éventuelles,
- ▷ étudier ses variations en précisant les extremums,
- ▷ étudier le signe de f,
- ▷ tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

c) $h(x) = \ln(5 - \sqrt{x^2 - 144})$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 - 2x}$

e) $r(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$

f) $t(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+(\ln(x))^2}\right)$

★ ★

Exercice 4 — Voir correction

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et du cercle trigonométrique. Soit t un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$. On note M le point image de $\dfrac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique, et N le point image de t. On considère enfin le point K milieu du segment $[MN]$.
On cherche la position de N sur le cercle trigonométrique telle que la distance IK soit minimale.

1) Quelles sont les coordonnées de M, N et K ?
2) Justifier que, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, on a

$$4IK^2 = 4 - 3\cos t + \sqrt{3}\sin t$$

3) On pose $f(t) = 4 - 3\cos t + \sqrt{3}\sin t$
Montrer que $f'(t) = 2\sqrt{3}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right)$
   a) Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $\sin\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f
   c) Conclure.

⋆ ⋆
Exercice 5 — Voir correction

Soit f une fonction dérivable de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| < 1$
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0\,;1]$.

⋆ ⋆
Exercice 6 — Voir correction

1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < x$.
2) En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < 2\sqrt{x}$
3) En déduire la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 7 — Voir correction

Soient $\lambda, \mu > 0$ deux réels tels que $\lambda + \mu = 1$.

1) Montrer que pour tout $x, y \in]0\,;+\infty[$, $\lambda x + \mu y \geq x^\lambda y^\mu$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
2) Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p} a_k^\lambda b_k^\mu \leq \left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^\lambda \left(\sum_{k=1}^{p} b_k\right)^\mu$$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

a) $f = v \circ u$ avec $u(x) = 3x^2$ et $v(x) = \cos(x)$. On a $f' = u' \times v' \circ u$ avec $u'(x) = 6x$ et $v'(x) = -\sin(x)$, ains

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -6x\sin(3x^2)}$$

b) $f = v \circ u$ avec $u(x) = 1 + \ln x$ et $v(x) = x^4$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 4x^3$.

$$\boxed{\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{4}{x}(1+\ln(x))^3}$$

c) $f = v \circ u$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

d) $f = v \circ u$ avec $u(x) = 2 + \sin x$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \cos x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos x \times \frac{1}{2+\sin x} = \frac{\cos x}{2+\sin x}}$$

Remarque : si u est dérivable et $u(x) > 0$ pour tout x, alors $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

e) Sur $]-\infty\,;-1[$ on a $|1+x| = -1-x$ et sur $]-1\,;+\infty[$ on a $|1+x| = 1+x$. On a donc

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \; f(x) = \begin{cases} \ln(-1-x) & \text{si } x < -1 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Ainsi, sur $]-\infty,-1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{-1-x} = \dfrac{1}{1+x}$ et sur $]-1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. On peut donc en conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}}$$

f) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = x^3 - x^2$, donc $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = 3x^2 - 2x$.
On a donc

$$\forall \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(x^3-x^2) - \mathrm{e}^{-x}(3x^2-2x)}{(x^3-x^2)^2}$$
$$\boxed{= \frac{\mathrm{e}^{-x}(-x^3-2x^2+2x)}{(x^3-x^2)^2}}$$

Correction de l'exercice 3 :

a) ▷ Ensemble de définition

Pour tout réel x, $f(x)$ est défini si et seulement si $x^2 \neq 0$, si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$. $\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*}$

▷ Limites

Étudion les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en 0^- et en 0^+.

- En $-\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$, et $\lim\limits_{X \to 0} \mathrm{e}^X = 1$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 1$.
- En $+\infty$ De même qu'en $-\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 1$.

- En 0 On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ car $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $x^2>0$ donc $-\dfrac{1}{x^2}<0$.

  Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0$

La courbe représentative de f a donc une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

▷ Variations

f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables,

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f'(x) = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

On sait que $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\mathrm{e}^{-1/x^2}>0$, ainsi $f'(x)$ est du même signe que $\dfrac{2}{x^3}$.

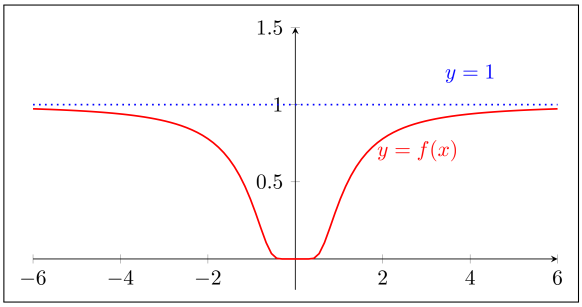
$\forall x<0$, $x^3<0$ donc $\dfrac{2}{x^3}<0$ et $\forall x>0$, $x^3>0$ donc $\dfrac{2}{x^3}>0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ 0	↗	1

▷ Signe

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\mathrm{e}^x>0$, donc $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $f(x)>0$.

▷ Allure de la courbe



b) ▷ Ensemble de définition

Pour tout réel x, $g(x)$ est défini car e^x et e^{-x} sont bien définis.

▷ Limites

En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

En $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ par composition de limites. Finalement, par somme de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$

▷ Variations

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Étudions le signe de $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\geq 0 &\iff \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\geq 0\\
&\iff \mathrm{e}^{2x}-1\geq 0 &&\text{en multipliant par } \mathrm{e}^x>0\\
&\iff \mathrm{e}^{2x}\geq 1\\
&\iff 2x\geq 0
\end{aligned}$$

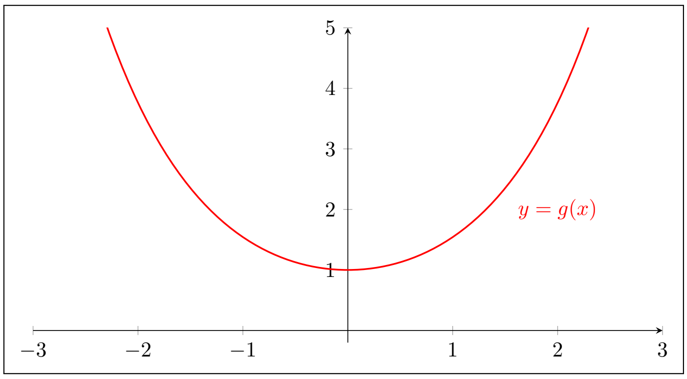
$$\iff x \geq 0$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

▷ Signe
$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc par somme $g(x) > 0$.
On peut aussi constater d'après le tableau de variation que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 1 > 0$.

▷ Allure de la courbe



c) ▷ Ensemble de définition
Pour que $h(x)$ soit défini, il faut que $x^2 - 144 \geq 0$ et $5 - \sqrt{x^2 - 144} > 0$.
$x^2 - 144 \geq 0 \iff x^2 \geq 144 \iff x \in]-\infty\,;-12] \cup [12\,;+\infty[$.
De plus, lorsque $x \in]-\infty\,;-12[\cup]12\,;+\infty[$, on a $10 - \sqrt{x^2 - 144} > 0 \iff \sqrt{x^2 - 144} < 5 \iff x^2 - 144 < 25 \iff x^2 < 169 \iff x \in [-13\,;13]$.
On en conclut que $\mathcal{D}_h =]-13\,;-12] \cup [12\,;13[$.

▷ Limites
Remarquons que h est une fonction paire : $\forall x \in \mathcal{D}_h$, $h(-x) = h(x)$. Ainsi, il suffit d'étudier les limites en 12 et en 13 pour connaître également les limites en -13 et en -12.

$\lim\limits_{x \to 13} (x^2 - 144) = 169 - 144 = 25$, et $\lim\limits_{X \to 25} \sqrt{X} = 5$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x \to 13} \sqrt{x^2 - 144} = 5$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 13} (5 - \sqrt{x^2 - 144}) = 0$.
Comme $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$, on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{x \to 13} h(x) = \lim\limits_{x \to -13} h(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 12} (x^2 - 144) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 12} \sqrt{x^2 - 144} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 12} h(x) = \lim\limits_{x \to -12} h(x) = \ln(5)$.

▷ Variations
$x \mapsto x^2 - 144$ s'annule en $x = 12$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2 - 144}$ n'est pas dérivable en $x = 12$.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-13; -12[\cup]12; 13[, \quad h'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 - 144}} \times \frac{1}{5 - \sqrt{x^2 - 144}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 144}} \times \frac{1}{5 - \sqrt{x^2 - 144}} \end{aligned}$$

Il a déjà été établi que $\forall x \in]-13\,;-12[\cup]12\,;13[$, $5 - \sqrt{x^2 - 144} > 0$ et $x^2 - 144 \geq 0$ donc $h'(x)$ est du signe de xx. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-13		-12		12		13		$+\infty$
$h'(x)$		//////		$+$		//////		$-$		//////	
$h(x)$		//////	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(5)$	//////	$\ln(5)$	$\searrow$	$-\infty$	//////	

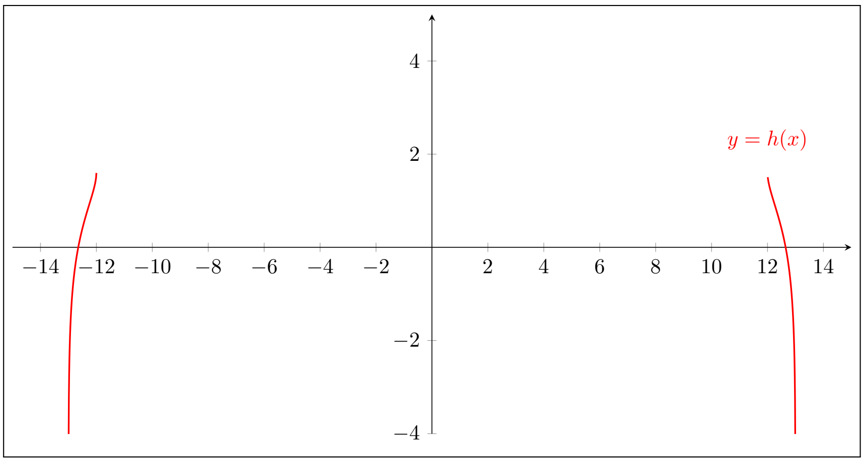
▷ Signe

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathcal{D}_h, \quad h(x) \geq 0 &\iff \ln(5-\sqrt{x^2-144}) \geq 0 \\
&\iff 5-\sqrt{x^2-144} \geq 1 \\
&\iff \sqrt{x^2-144} \leq 4 \\
&\iff x^2-144 \leq 16 \\
&\iff x^2 \leq 160 \\
&\iff x \in [-\sqrt{160}; \sqrt{160}] \\
&\iff x \in [-4\sqrt{10}; 4\sqrt{10}]
\end{aligned}
$$

On remarque que $12 < \sqrt{160} < 13$, donc on a finalement :

x	$-\infty$		-13		$-4\sqrt{10}$		-12		12		$4\sqrt{10}$		13		$+\infty$
$h(x)$		//////		$-$	0	$+$		//////		$+$	0	$-$		//////	

▷ Allure de la courbe



d) ▷ Ensemble de définition

Pour tout réel x, $k(x)$ est défini si et seulement si $x^3+x^2-2x \neq 0$. On résout donc $x^3+x^2-2x=0$:

$$
\begin{aligned}
x^3+x^2-2x=0 &\iff x(x^2+x-2)=0 \\
&\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x^2+x-2=0 \\
&\iff x=0 \quad \text{ou} \quad x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2
\end{aligned}
$$

donc finalement k est définie sur $\mathcal{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$.

▷ Limites

Pour tout $x \in \mathcal{D}_k$, on a $x^3+x^2-2x = x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1$, donc par produit de limites on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2-2x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-2x)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=0$

Pour savoir si $\dfrac{1}{x^3+x^2-2x}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x tend vers -2, 0 et 1, il faut étudier le signe du polynôme x^3+x^2-2x.

On sait que $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$, donc on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x^3+x^2-2x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}k(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}k(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}k(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}k(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}k(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}k(x)=+\infty$

- ▷ Variations

  k est dérivable sur son ensemble de définition comme inverse de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (sur $\mathcal{D}_k$).

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathcal{D}_k,\quad k'(x)&=\frac{-(3x^2+2x-2)}{(x^3+x^2-2x)^2}\\&=\frac{-3x^2-2x+2}{(x^3+x^2-2x)^2}\end{aligned}$$

Or $\forall x\in\mathcal{D}_k$, $(x^3+x^2-2x)^2\geq 0$ donc $k(x)$ est du signe de $-3x^2-2x+2$. On étudie le signe de ce trinôme : $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)\times 2=28$ donc il a deux racines, $x_1=\dfrac{2-\sqrt{28}}{-6}=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$

On a $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}<0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}>0$ car $\sqrt{7}>1$.

Puisque $4<7<9$, on a $2<\sqrt{7}<3$, donc $\sqrt{7}-1<2$ et finalement $\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}<\dfrac{2}{3}<1$.

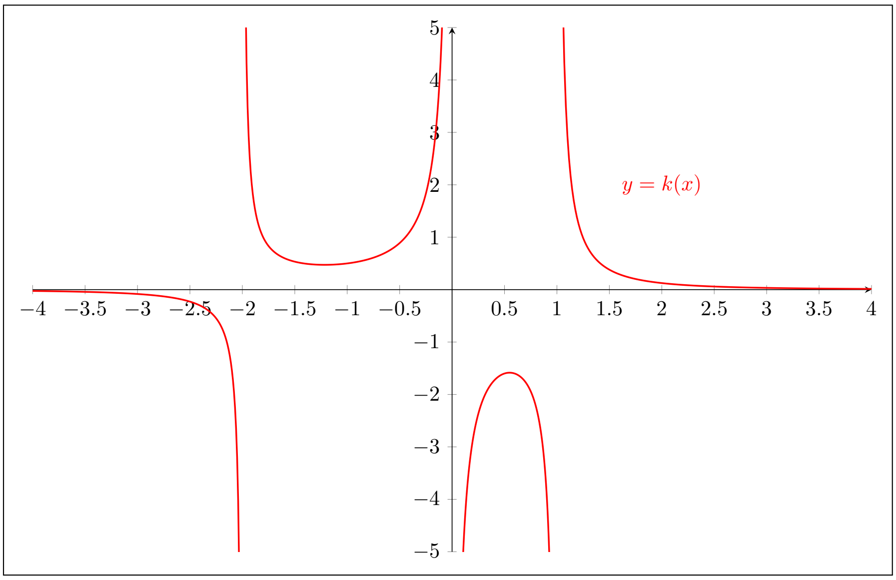
De même, on a $-1-\sqrt{7}>-4$ donc $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}>\dfrac{-4}{3}>2$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		0		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$k(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$k\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{8}\right)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$k\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{8}\right)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

- ▷ Signe

  $\forall x\in\mathcal{D}_k$, $k(x)$ est du même signe que x^3+x^2-2x (voir plus haut).
- ▷ Allure de la courbe



e) ▷ <u>Ensemble de définition</u>

Pour tout réel x, $r(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et $1 - x > 0$, si et seulement si $x \in]0,1[$. Ainsi $\mathcal{D}_r =]0,1[$.

▷ <u>Limites</u>

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$. Par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(x) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$. Par quotient de limites, on a donc $\lim\limits_{x\to 1} r(x) = +\infty$.

▷ <u>Variations</u>

r est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0,1[, \quad r'(x) = \frac{\dfrac{-1}{1-x} \times \ln(x) - \ln(1-x) \times \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$
$$= \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} \times (-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x))$$

On remarque que $\forall x \in]0,1[$, $1-x \in]0,1[$ donc $\ln(x) < 0$ et $\ln(1-x) < 0$. Ainsi, $-x\ln(x) > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$, d'où l'on conclut que $r'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

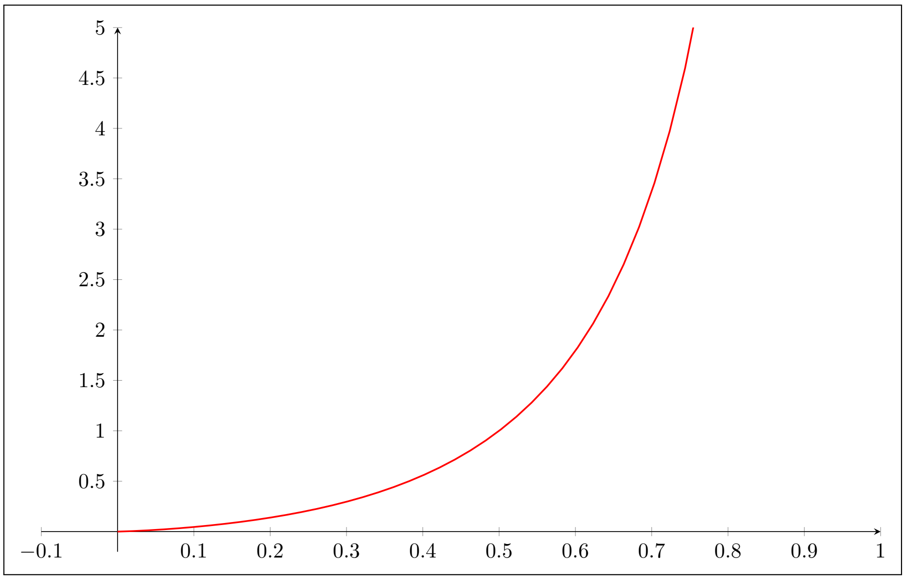
Ainsi on a

x	0		1
$r'(x)$	‖	$+$	‖
$r(x)$	‖	$0 \nearrow +\infty$	‖

▷ <u>Signe</u>

$\forall x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ et $\ln(1-x) < 0$ donc $r(x) > 0$.

▷ <u>Allure de la courbe</u>



f) ▷ Ensemble de définition

Pour tout réel x, $t(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et $1 + (\ln(x))^2 \neq 0$.
Or si $x > 0$, alors $\ln(x)$ est bien défini et $(\ln(x))^2 \geq 0$ donc $1 + (\ln(x))^2 \geq 1 > 0$. donc $t(x)$ est bien défini.
Finalement $\mathcal{D}_t =]0\,;+\infty[$.

▷ Limites

$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0} (\ln(x))^2 = +\infty$, et par opérations $\lim_{x\to 0} \dfrac{\pi}{1+(\ln(x))^2} = 0$. Puisque $\lim_{X\to 0} \sin(X) = 0$, on a par composition de limites $\lim_{x\to 0} t(x) = 0$.
De même, $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} (\ln(x))^2 = +\infty$ et par opérations et compositions de limites, $\lim_{x\to +\infty} t(x) = 0$.

▷ Variations

Sur $]0,+\infty[$, la dérivée de $u : x \mapsto \dfrac{\pi}{1+(\ln(x))^2}$ est $u'(x) = \dfrac{-\pi \times 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x}}{(1+(\ln(x))^2)^2} = \dfrac{-2\pi\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)^2}$
t est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad t'(x) = \frac{-2\pi\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)^2} \times \cos\left(\frac{\pi}{1+(\ln(x))^2}\right)$$

- Étude du signe de $\dfrac{-2\pi\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)^2}$

  $\forall x > 0$, $(1+(\ln(x))^2)^2 > 0$ donc $\forall x > 0$, $\dfrac{-2\pi\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)^2}$ est du signe opposé à $\ln(x)$, c'est à dire positif lorsque $x > 1$ et négatif lorsque $0 < x < 1$.

- Étude du signe de $\cos\left(\dfrac{\pi}{1+(\ln(x))^2}\right)$

  Remarquons que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $1 + \ln(x)^2 \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{\pi}{1+(\ln(x))^2} \leq \pi$.
  On sait que pour tout $X \in [0,\pi]$, $\cos(X) \geq 0 \iff 0 \leq X \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $\cos(X) \leq 0 \iff \dfrac{\pi}{2} \leq X \leq \pi$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{1+(\ln(x))^2}\right) \geq 0 \iff \frac{\pi}{1+\ln(x)^2} \leq \frac{\pi}{2} \\
&\iff \frac{1}{1+\ln(x)^2} \leq \frac{1}{2} \\
&\iff 1+\ln(x)^2 \geq 2 \\
&\iff \ln(x)^2 \geq 1 \\
&\iff \ln(x) \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[
\end{aligned}$$

$$\iff x \in]0; \mathrm{e}^{-1}[\cup] \,\mathrm{e}; +\infty[$$

Finalement, on obtient le tableau suivant :

x	0		e^{-1}		1		e		$+\infty$
$\dfrac{-2\pi\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)^2}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos\left(\dfrac{\pi}{1+(\ln(x))^2}\right)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$t(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Calcul des extremums : $t(\mathrm{e}^{-1}) = \sin\left(\dfrac{\pi}{1+\ln(\mathrm{e}^{-1})^2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

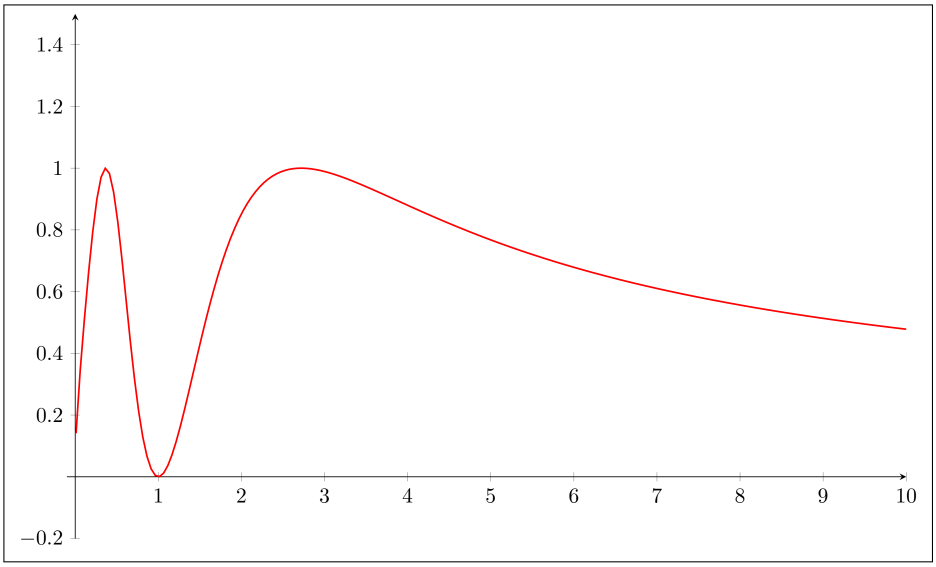
$t(1) = \sin\left(\dfrac{\pi}{1+\ln(1)^2}\right) = \sin(\pi) = 0$

$t(\mathrm{e}) = \sin\left(\dfrac{\pi}{1+\ln(\mathrm{e}^1)^2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

- Signe

  On a déjà remarqué que $\forall x > 0$, $\dfrac{\pi}{1+\ln(x)^2} \in [0,\pi]$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{1+(\ln(x))^2}\right) \geq 0$.

- Allure de la courbe



Correction de l'exercice 4 :

1) M a pour coordonnées $(\cos\dfrac{\pi}{3}, \sin\dfrac{\pi}{3}) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

   N a pour coordonnées $(\cos t, \sin t)$

   K a pour coordonnées $(\dfrac{1}{2}(\cos t + \dfrac{1}{2}), \dfrac{1}{2}(\sin t + \dfrac{\sqrt{3}}{2}))$.

2) On a

$$IK^2 = \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2 t - \frac{3}{4}\cos t + \frac{9}{16} + \frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin t + \frac{3}{16}$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} - \frac{3}{4}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin t + \frac{12}{16}$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin t$$

donc on a bien $4IK^2 = 4 - 3\cos t + \sqrt{3}\sin t$.

3) On a $f'(t) = 3\sin t + \sqrt{3}\cos t$

Or $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = \sin t \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos t \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t$

donc

$$2\sqrt{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 3\sin t + \sqrt{3}\cos t = f'(t)$$

a) $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0 \iff t + \frac{\pi}{6} \in [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$.

Ainsi, dans $[-\pi, \pi]$, $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0 \iff t + \frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ et $t \in [-\pi, \pi]$

Ainsi

$$\boxed{S = [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]}$$

b) On a donc

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(t)$	7	↘	$4-2\sqrt{3}$	↗	$4+2\sqrt{3}$	↘	7

c) On a $4 - 2\sqrt{3} < 7$ donc le minimum de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est $4 - 2\sqrt{3}$ et il est atteint pour $t = -\frac{\pi}{6}$

Correction de l'exercice 5 : On pose $g(x) = f(x) - x$. Alors g est la somme de $x \mapsto f(x)$ et de $x \mapsto -x$ qui sont deux fonctions dérivables sur $[0, 1]$ donc g est dérivable sur $[0, 1]$. De plus, $\forall x \in [0, 1]$, $g'(x) = f'(x) - 1$. Or $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| < 1$ donc $f'(x) < 1$ donc $g'(x) < 0$. On en déduit que g est strictement décroissante sur $]0\,;1[$.
De plus, $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$. Puisque f est à valeurs dans $[0, 1]$, on a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ donc $f(1) - 1 \leq 0$.
g est une fonction continue car dérivable, strictement décroissante sur $[0, 1]$, et $0 \in [f(0), f(1)]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = 0$, il existe donc un unique réel $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Correction de l'exercice 6 :

1) Étudions la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(x)$ définie sur $]0\,;+\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. On en déduit que $g'(x)$ est du signe de $x - 1$ donc négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$. Puisque $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$, on a :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	1	↗	

On en déduit que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 1 > 0$ donc $x > \ln x$.

2) Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$ (propriétés de la fonction ln).

De plus, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$ d'après la question précédente.

On en déduit que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{2}\ln(x) < \sqrt{x}$ donc $\ln(x) < 2\sqrt{x}$.

3) Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ d'après la question précédente et car $x > 0$.
Ainsi, $\forall x \in]1\,;+\infty[$, $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ on en déduit par encadrement de limites que $\lim\limits_{x\to \frac{\ln(x)}{x}} = 0$.

Correction de l'exercice 7 :

1) Fixons un réel $y > 0$ et posons $g : x \longmapsto \lambda x + \mu y - x^{\lambda} y^{\mu}$.
g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \lambda - \lambda x^{\lambda-1} y^{\mu}$. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
g'(x) \geq 0 &\iff \lambda - \lambda x^{\lambda-1} y^{\mu} \geq 0 \\
&\iff x^{\lambda-1} y^{\mu} \leq 1 \\
&\iff x^{\lambda-1} \leq y^{-\mu} \\
&\iff x^{-\mu} \leq y^{-\mu} \\
&\iff x \geq y && \text{car } -\mu < 0
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		y		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	μy	$\searrow$	0	$\nearrow$	

on en déduit que $\lambda x + \mu y \geq x^{\lambda} y^{\mu}$ pour tout réel $x > 0$, avec égalité si et seulement si $x = y$.
Ceci étant vrai quel que soit y, on en conclut finalement que l'inégalité est vraie pour tout $x, y \in]0, +\infty[$.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p$ on pose $a'_k = \dfrac{a_k}{\sum_{i=1}^{p} a_i}$ et $b'_k = \dfrac{b_k}{\sum_{i=1}^{p} b_i}$.
On a alors d'après l'inégalité précédente : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $(a'_k)^{\lambda}(b'_k)^{\mu} \leq \lambda a'_k + \mu b'_k$.
En faisant la somme de toutes ces inégalités pour k allant de 1 à p on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} (a'_k)^{\lambda}(b'_k)^{\mu} \leq \lambda \sum_{k=1}^{p} a'_k + \mu \sum_{k=1}^{p} b'_k$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k^{\lambda}}{\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^{\lambda}} \frac{b_k^{\mu}}{\left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)^{\mu}} \leq \lambda \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{p} a_k}{\sum_{i=1}^{p} a_i}}_{=1} + \mu \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{p} b_k}{\sum_{i=1}^{p} b_i}}_{=1}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k^{\lambda}}{\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^{\lambda}} \frac{b_k^{\mu}}{\left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)^{\mu}} \leq \lambda + \mu$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k^{\lambda}}{\left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^{\lambda}} \frac{b_k^{\mu}}{\left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)^{\mu}} \leq 1$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{p} a_k^{\lambda} b_k^{\mu} \leq \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)^{\lambda} \times \left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)^{\mu}$$